ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. / Β ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	01 / 11 / 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 33

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 41

Α3. α. Λ **β.** Λ **γ.** Σ **δ.** Λ **ε.** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

Β2. $\overrightarrow{B\Gamma} = (x_\Gamma - x_B, y_\Gamma - y_B) = (\lambda - 2\ ,\ 3-3) = (\lambda - 2\ ,\ 0)$.

Β3. Εφόσον Μ είναι το μέσο της ΑΓ, τότε:

$$\frac{x_A + x_\Gamma}{2} = 2 \Leftrightarrow \frac{\lambda + 0}{2} = 2 \Leftrightarrow \lambda = 4 \quad \text{και} \quad \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$$ που ισχύει πάντα.

Άρα $\lambda = 4$.

Β4. Για να είναι παραλληλόγραμμο το ΑΒΓΔ, θέλουμε:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow (x_B - x_A, y_A - y_B) = (x_\Gamma - x_\Delta, y_\Gamma - y_\Delta) \Leftrightarrow (2-0, 3-0) = (4 - x_\Delta, 3 - y_\Delta) \Leftrightarrow$$

$$(2,3) = (4 - x_\Delta, 3 - y_\Delta) \Leftrightarrow 4 - x_\Delta = 2 \quad \text{και} \quad 3 - y_\Delta = 3 \Leftrightarrow x_\Delta = 2 \quad \text{και} \quad y_\Delta = 0.$$

Άρα $\Delta(2,0)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\ ,\ y_B - y_A) = (2-(-1)\ ,0-3) = (3\ ,-3)$.

Γ2. Είναι $\overrightarrow{A\Gamma} = (x_1 - x_A\ ,\ y_1 - y_A) \Leftrightarrow (-2,2) = (x_1 - (-1)\ ,\ y_1 - 3) = \begin{cases} x_1 + 1 = -2 \\ y_1 - 3 = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = 5 \end{cases}$$. Άρα $\Gamma(-3,5)$.

Γ3. Είναι $\overrightarrow{AB} = (3,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (-2,2)$. Άρα η μεταξύ τους ορίζουσα θα είναι ίση με:

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = (-2)(-3) - 2\cdot 3 = 6 - 6 = 0.$$

Συνεπώς είναι $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{A\Gamma}$, οπότε δεδομένου ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι και στον ίδιο φορέα (λόγω του κοινού τους σημείου Α), τότε Α, Β και Γ είναι συνευθειακά. Άρα δεν αποτελούν κορυφές τριγώνου.

Γ4. Η ισότητα για οποιοδήποτε σημείο Μ ισοδύναμα γίνεται:

$$2\vec{\mathrm{A\Gamma}}+\vec{\mathrm{MA}}=\vec{\mathrm{MB}}+2\vec{\mathrm{AB}}+\vec{\mathrm{B\Delta}} \Leftrightarrow 2\vec{\mathrm{A\Gamma}}+\vec{\mathrm{MA}}-\vec{\mathrm{MB}}=2\vec{\mathrm{AB}}+\vec{\mathrm{B\Delta}}$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{\mathrm{A\Gamma}}+\vec{\mathrm{BA}}=2\vec{\mathrm{AB}}+\vec{\mathrm{B\Delta}} \Leftrightarrow 2\vec{\mathrm{A\Gamma}}-2\vec{\mathrm{AB}}=\vec{\mathrm{B\Delta}}-\vec{\mathrm{BA}} \Leftrightarrow 2\left(\vec{\mathrm{A\Gamma}}-\vec{\mathrm{AB}}\right)=\vec{\mathrm{A\Delta}}$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{\mathrm{B\Gamma}}=\vec{\mathrm{A\Delta}}\ .$$

Όμως είναι $\vec{\mathrm{B\Gamma}}=\left(x_\Gamma-x_B\ ,\ y_\Gamma-y_B\right) \Leftrightarrow \vec{\mathrm{B\Gamma}}=\left(-3-2\ ,\ 5-0\right) \Leftrightarrow \vec{\mathrm{B\Gamma}}=\left(-5\ ,\ 5\right)$ και

$\vec{\mathrm{A\Delta}}=\left(x_\Delta-x_A\ ,\ y_\Delta-y_A\right) \Leftrightarrow \vec{\mathrm{A\Delta}}=\left(3\alpha-2-(-1)\ ,\ \alpha^2+4-3\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{\mathrm{A\Delta}}=\left(3\alpha-1\ ,\ \alpha^2+1\right)$.

Άρα $2\vec{\mathrm{B\Gamma}}=\vec{\mathrm{A\Delta}} \Leftrightarrow 2(-5\ ,\ 5)=\left(3\alpha-1\ ,\ \alpha^2+1\right) \Leftrightarrow (-10\ ,\ 10)=\left(3\alpha-1\ ,\ \alpha^2+1\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha-1=-10 \\ \alpha^2+1=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha=-9 \\ \alpha^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-3 \\ \alpha=-3 \ \text{ ή } \ \alpha=3 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=-3\ .$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε έχουμε:

$2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\ =\ 2(x_1,y_1)+3(x_2,y_2)\ =\ (2x_1+3x_2\ ,2y_1+3y_2)$ και

$\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=\ (x_1,y_1)-3(x_2,y_2)=(x_1-3x_2\ \ ,y_1-3y_2)$

Άρα προκύπτουν τα συστήματα:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=4 \\ x_1-3x_2=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} 2y_1+3y_2=-2 \\ y_1-3y_2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=2 \\ y_2=-2 \end{cases}$$

Άρα $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,-2)$.

Δ2. Έχουμε:

$\vec{v}=\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\kappa(-1,2)+(2,-2)=(-\kappa+2\ \ ,\ 2\kappa-2)$ και

$\vec{u}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=2(-1,2)+3(2,-2)=(-2,4)+(6,-6)=(4,-2)$.

(i) $\vec{u}\,//\,\vec{v} \Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\kappa+2 & 2\kappa-2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -2(-\kappa+2)-4(2\kappa-2)=0 \Leftrightarrow$

$$2\kappa-4-8\kappa+8=0 \Leftrightarrow -6\kappa+4=0 \Leftrightarrow \kappa=\frac{2}{3}.$$

(ii) $|\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{13} \Leftrightarrow |(4,-2)-(-\kappa+2,2\kappa-2)|=\sqrt{13} \Leftrightarrow |(\kappa+2\ ,-2\kappa)|=\sqrt{13} \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(\kappa+2)^2+(-2\kappa)^2}=\sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{\kappa^2+4\kappa+4+4\kappa^2}=\sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{5\kappa^2+4\kappa+4}=\sqrt{13} \Leftrightarrow$$

$$5\kappa^2+4\kappa+4=13 \Leftrightarrow 5\kappa^2+4\kappa-9=0 \Leftrightarrow \kappa=1 \text{ ή } \kappa=-\frac{9}{5}.$$

Και επειδή θέλουμε μόνο θετικό πραγματικό, τότε κ = 1 .

Δ3. $\vec{\gamma}=-4\vec{i}+8\vec{j}=-4(1,0)+8(0,1)=(-4,8)$. Άρα ψάχνουμε $\lambda,\mu\in R$, τέτοια ώστε:

$\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta} \Leftrightarrow (-4,8)=\lambda(-1,2)+\mu(2,-2) \Leftrightarrow (-4,8)=(-\lambda+2\mu\ ,\ 2\lambda-2\mu) \Leftrightarrow$

$\begin{cases}-\lambda+2\mu=-4\\ 2\lambda-2\mu=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=4\\ \mu=0\end{cases}$. Άρα $\vec{\gamma}=4\vec{\alpha}+0\vec{\beta}=4\vec{\alpha}$.